A black background with a black square

Description automatically generated with medium confidenceΕθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Λύσεις Θεμάτων

Ιωάννης (Χουάν) Τσαντήλας

03120883

[Github-Repo](https://github.com/ntua-el20883/ece-ntua2020)

Contents

[Πολλαπλής Επιλογής (σκόρπια) 1](#_Toc177917265)

[Ερώτημα 1 1](#_Toc177917266)

[Ερώτημα 2 1](#_Toc177917267)

[Ερώτημα 3 1](#_Toc177917268)

[Ερώτημα 4 1](#_Toc177917269)

[Ερώτημα 5 2](#_Toc177917270)

[Ερώτημα 6 2](#_Toc177917271)

[Ερώτημα 7 2](#_Toc177917272)

[Ερώτημα 8 2](#_Toc177917273)

[Ερώτημα 9 3](#_Toc177917274)

[Ερώτημα 10 3](#_Toc177917275)

[Κανονική 24 4](#_Toc177917276)

[Πολλαπλής Επιλογής 4](#_Toc177917277)

[Ερώτημα 1 4](#_Toc177917278)

[Ερώτημα 2 4](#_Toc177917279)

[Ερώτημα 3 5](#_Toc177917280)

[Θέμα 1 7](#_Toc177917281)

[Ερώτημα (α) 7](#_Toc177917282)

[Ερώτημα (β) 7](#_Toc177917283)

[Ερώτημα (γ) 7](#_Toc177917284)

[Θέμα 2 8](#_Toc177917285)

[Ερώτημα (α) 8](#_Toc177917286)

[Ερώτημα (β) 8](#_Toc177917287)

[Ερώτημα (γ) 8](#_Toc177917288)

[Ερώτημα (δ) 9](#_Toc177917289)

[Ερώτημα (ε) 9](#_Toc177917290)

[Ερώτημα (στ) 9](#_Toc177917291)

[Ερώτημα (ζ) 9](#_Toc177917292)

[Κανονική 23 11](#_Toc177917293)

[Θέμα 1 11](#_Toc177917294)

[Ερώτημα (α) 11](#_Toc177917295)

[Ερώτημα (β) 11](#_Toc177917296)

[Ερώτημα (γ) 11](#_Toc177917297)

[Ερώτημα (δ) 11](#_Toc177917298)

[Θέμα 2 13](#_Toc177917299)

[Ερώτημα (α) 13](#_Toc177917300)

[Ερώτημα (β) 13](#_Toc177917301)

[Ερώτημα (γ) 13](#_Toc177917302)

[Θέμα 3 15](#_Toc177917303)

[Ερώτημα (α) 15](#_Toc177917304)

[Ερώτημα (β) 15](#_Toc177917305)

[Ερώτημα (γ) 15](#_Toc177917306)

[Θέμα 4 17](#_Toc177917307)

[Επαναληπτική 23 18](#_Toc177917308)

[Θέμα 1 18](#_Toc177917309)

[Ερώτημα (α) 18](#_Toc177917310)

[Ερώτημα (β) 18](#_Toc177917311)

[Ερώτημα (γ) 19](#_Toc177917312)

[Ερώτημα (δ) 19](#_Toc177917313)

[Θέμα 2 20](#_Toc177917314)

[Ερώτημα (α) 20](#_Toc177917315)

[Ερώτημα (β) 20](#_Toc177917316)

[Ερώτημα (γ) 20](#_Toc177917317)

[Ερώτημα (δ) 20](#_Toc177917318)

[Θέμα 3 22](#_Toc177917319)

[Ερώτημα (α) 22](#_Toc177917320)

[Ερώτημα (β) 22](#_Toc177917321)

[Ερώτημα (γ) 22](#_Toc177917322)

[Ερώτημα (δ) 23](#_Toc177917323)

[Επί Πτυχίω 23 24](#_Toc177917324)

[Θέμα 1 24](#_Toc177917325)

[Ερώτημα (α) 24](#_Toc177917326)

[Ερώτημα (β) 24](#_Toc177917327)

[Ερώτημα (γ) 25](#_Toc177917328)

[Ερώτημα (δ) 25](#_Toc177917329)

[Ερώτημα (ε) 25](#_Toc177917330)

[Θέμα 2 26](#_Toc177917331)

[Ερώτημα (α) 26](#_Toc177917332)

[Ερώτημα (β) 26](#_Toc177917333)

[Ερώτημα (γ) 26](#_Toc177917334)

[Ερώτημα (δ) 26](#_Toc177917335)

[Κανονική 22 28](#_Toc177917336)

[Θέμα 1 28](#_Toc177917337)

[Ερώτημα (α) 28](#_Toc177917338)

[Ερώτημα (β) 28](#_Toc177917339)

[Ερώτημα (γ) 28](#_Toc177917340)

[Θέμα 2 30](#_Toc177917341)

[Ερώτημα (α) 30](#_Toc177917342)

[Ερώτημα (β) 30](#_Toc177917343)

[Ερώτημα (γ) 31](#_Toc177917344)

[Θέμα 3 32](#_Toc177917345)

[Ερώτημα (α) 32](#_Toc177917346)

[Ερώτημα (β) 32](#_Toc177917347)

[Ερώτημα (γ) 32](#_Toc177917348)

[Ερώτημα (δ) 33](#_Toc177917349)

[Ερώτημα (ε) 33](#_Toc177917350)

[Ερώτημα (στ) 33](#_Toc177917351)

[Ερώτημα (ζ) 33](#_Toc177917352)

[Ερώτημα (η) 34](#_Toc177917353)

[Επαναληπτική 22 35](#_Toc177917354)

[Θέμα 1 35](#_Toc177917355)

[Ερώτημα (α) 35](#_Toc177917356)

[Ερώτημα (β) 35](#_Toc177917357)

[Ερώτημα (γ) 36](#_Toc177917358)

[Ερώτημα (δ) 36](#_Toc177917359)

[Ερώτημα (ε) 36](#_Toc177917360)

[Θέμα 2 37](#_Toc177917361)

[Ερώτημα (α) 37](#_Toc177917362)

[Ερώτημα (β) 37](#_Toc177917363)

[Ερώτημα (γ) 37](#_Toc177917364)

[Ερώτημα (δ) 38](#_Toc177917365)

[Θέμα 3 39](#_Toc177917366)

[Ερώτημα (α) 39](#_Toc177917367)

[Ερώτημα (β) 39](#_Toc177917368)

[Ερώτημα (γ) 40](#_Toc177917369)

[Ερώτημα (δ) 40](#_Toc177917370)

[Ερώτημα (ε) 41](#_Toc177917371)

[Ερώτημα (στ) 41](#_Toc177917372)

# Πολλαπλής Επιλογής (σκόρπια)

Ερώτημα 1

Έστω Α, Β, C τρία ενδεχόμενα και P ένα μέτρο πιθανότητας. Ποιο/α από τα παρακάτω είναι αληθή;

#### Λύση

Το **(γ)**.

Ερώτημα 2

Έστω μία συνηθισμένη τράπουλα με 52 φύλλα. Ποιο/α από τα παρακάτω είναι αληθή;

1. Αν μοιράσουμε με τη σειρά 6 φύλλα υπάρχουν δυνατές εξάδες.
2. Αν μοιράσουμε 6 φύλλα υπάρχουν δυνατές εξάδες.
3. Αν μοιράσουμε με τη σειρά 9 φύλλα υπάρχουν δυνατές εννιάδες.

#### Λύση

Το **(γ)**.

Ερώτημα 3

Έστω Χ, Υ τυχαίες μεταβλητές που αναπαριστούν τα αποτελέσματα των ρίψεων δύο δίκαιων ζαριών. Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή . Ποιο/α από τα παρακάτω είναι αληθή;

1. Η πιθανότητα η V να πάρει τιμή 2 είναι ίση με 1/36.
2. Η κατανομή της V μπορεί να είναι ομοιόμορφη στο σύνολο {2,4,6,8,10,12}.
3. Η κατανομή της V μπορεί να συγκεντρώνεται στο μονοσύνολο {7}.

#### Λύση

Το **(γ)**.

Ερώτημα 4

Έστω Χ μία διακριτή τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή μ και διασπορά σ2. Ποιο/α από τα παρακάτω είναι αληθή;

1. για κάποιο d>0.

#### Λύση

Τα **(α, β)**.

Ερώτημα 5

Οι παρακάτω συναρτήσεις είναι πυκνότητες πιθανότητας συνεχών τυχαίων μεταβλητών:

#### Λύση

Το **(γ)**.

Ερώτημα 6

Έστω A, B, C τρία ενδεχόμενα και P ένα μέτρο πιθανότητας. Ποιο/α από τα παρακάτω είναι αληθή;

#### Λύση

Το **(γ)**.

Ερώτημα 7

Έστω Χ, Υ τυχαίες μεταβλητές που αναπαριστούν τα αποτελέσματα των ρίψεων δύο δίκαιων ζαριών. Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή . Ποιο/α από τα παρακάτω είναι αληθή;

1. Η πιθανότητα η V να πάρει τιμή 3 είναι ίση με 2/36.
2. Η πιθανότητα η V να πάρει τιμή 7μπορεί να είναι ίση με 1.
3. Η κατανομή της V μπορεί να είναι ομοιόμορφη στο σύνολο {2,4,6,8,10,12}.

#### Λύση

Το **(α, β)**.

Ερώτημα 8

Έστω Χ τ.μ. που ακολουθεί την Εκθετική κατανομή με παράμετρο 9. Ποιο/α από τα παρακάτω είναι αληθή;

#### Λύση

Το **(γ)**.

Ερώτημα 9

Έστω ανεξάρτητες τ.μ. που ακολουθούν την Εκθετική κατανομή με άγνωστη παράμετρο θ.

1. Ο εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας για την θ δίνεται από .
2. Ο εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας για την θ δίνεται από .
3. Ο δειγματικός μέσος όρος είναι αμερόληπτος και συνεπής εκτιμητής για την μέση τιμή θ.

#### Λύση

Το **(α, γ)**.

Ερώτημα 10

Έστω 16 ομάδες που συμμετέχουν στο μουντιάλ. Οι 3 πρώτες ομάδες παίρνουν τα μετάλλια. Ποιο/α από τα παρακάτω είναι αληθή;

1. Αν δεν μας ενδιαφέρει η σειρά, υπάρχουν 16!/13! δυνατές τριάδες.
2. Αν δεν μας ενδιαφέρει η σειρά, υπάρχουν 16!/(3!13!) δυνατές τριάδες.
3. Αν μας ενδιαφέρει η σειρά, υπάρχουν 16!/(3!13!) δυνατές τριάδες.

#### Λύση

Το **(β)**.

* *Combinations*: **ΔΕΝ** μας νοιάζει η σειρά:
* *Permutations*: μας νοιάζει η σειρά:

# Κανονική 24

## Πολλαπλής Επιλογής

### Ερώτημα 1

Λαμβάνετε μέρος σε ένα διαγωνισμό ξιφασκίας και στον όμιλό σας υπάρχουν δώδεκα (12) αντίπαλοι. Έξι (6) από αυτούς χρησιμοποιούν το ξίφος τύπου Α, τρεις (3) το ξίφος τύπου Β και τρεις (3) το ξίφος τύπου Γ. Εσείς χρησιμοποιείτε ένα καινούριο ξίφος και γνωρίζετε ότι η πιθανότητα να κερδίσετε έναν αγώνα εναντίον οποιουδήποτε παίκτη με ξίφος τύπου Α είναι 0.3, με ξίφος τύπου Β είναι 0.4 και με ξίφος τύπου Γ είναι 0.5.

1. Ποια είναι η πιθανότητα να νικήσετε στον πρώτο σας αγώνα αν ο αντίπαλός σας επιλέγει με τυχαίο τρόπο από τους 12 αντιπάλους του ομίλου σας;

(α) 0.295 (β) 0.305 (γ) 0.375 (δ) 0.445 (ε) 0.465

1. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Bayes υπολογίστε την πιθανότητα ο αντίπαλός σας να χρησιμοποίησε ξίφος τύπου Α αν γνωρίζετε ότι έχετε νικήσει στον αγώνα.

(α) 0.38 (β) 0.40 (γ) 0.42 (δ) 0.44 (ε) 0.46

#### Λύση – Ερώτημα (α)

Έχουμε πιθανότητα να πετύχουμε τύπου Α, να πετύχουμε τύπου Β και να πετύχουμε τύπου Γ. Αντίστοιχα, η πιθανότητα να νικήσουμε τον κάθε τύπο είναι . Επομένως, η συνολική πιθανότητα είναι:

Το **(γ)**.

#### Λύση – Ερώτημα (β)

Το **(β)**.

### Ερώτημα 2

Παίρνετε μέρος σε αγώνα τοξοβολίας και έχετε πιθανότητα να πετύχετε το στόχο ίση με p. Ρίχνετε τις βολές σας διαδοχικά και ανεξάρτητα μέχρι να πραγματοποιηθεί το εξής ενδεχόμενο: είτε να πετύχετε τον στόχο σας δύο (2) φορές στη σειρά είτε να αστοχήσετε δύο (2) φορές στη σειρά.

1. Βρείτε τη δεσμευμένη μέση τιμή του αριθμού των βολών ενός τέτοιου παιχνιδιού όταν γνωρίζετε ότι αστοχήσατε στην πρώτη σας ρίψη.

(α) (β) (γ) (δ) (ε)

1. Βρείτε τη μέση τιμή του αριθμού των βολών ενός τέτοιου παιχνιδιού.

(α)  (β) (γ) (δ) (ε)

#### Λύση – Ερώτημα (α)

Έστω πως έχουμε τις εξής καταστάσεις: : η 1η βολή ήταν αποτυχία και : η 1η βολή ήταν επιτυχία.

Έστω πως η 1η βολή ήταν αποτυχία (άρα βρισκόμαστε στην κατάσταση ). Εάν η 2η βολή είναι επίσης αποτυχία, τότε το παιχνίδι τελειώνει. Εάν η 2η είναι 1, τότε το παιχνίδι συνεχίζεται, μόνο που τώρα βρισκόμαστε στην κατάσταση .

Επομένως, ο αναμενόμενος αριθμός βολών εάν η 1η βολή ήταν αποτυχία είναι:

Όπου:

* Ο όρος 1 είναι λόγω της 1ης βολής (η οποία ήταν αποτυχία).
* Ο όρος είναι σε περίπτωση 2ης αποτυχίας και το παιχνίδι τελειώνει.
* Ο όρος είναι στην περίπτωση όπου η 2η βολή είναι επιτυχία και άρα περνάμε στην κατάσταση .

Ομοίως, ο αναμενόμενος αριθμός βολών εάν η 1η βολή ήταν επιτυχία είναι:

Συνδυάζοντας τις , προκύπτει:

Το **(β)**.

#### Λύση – Ερώτημα (β)

Ο συνολικός αναμενόμενος αριθμός βολών είναι το σταθμισμένο άθροισμα των δύο καταστάσεων:

Όπου:

Άρα:

Το **(β)**.

### Ερώτημα 3

Έστω είναι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές, τέτοιες ώστε η κοινή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας τους να δίνεται από τον τύπο , όπου και για οποιαδήποτε άλλο .

1. Με τί ισούται το c[[1]](#footnote-2);

(α) 3 (β) 6 (γ) 7 (δ) 8 (ε) 9

1. Βρείτε τη μέση τιμή του γινομένου των , δηλαδή υπολογίστε .

(α) (β) (γ) (δ) (ε)

#### Λύση – Ερώτημα (a)

Κανονικοποιούμε την f:

Το **(β)**.

#### Λύση – Ερώτημα (β)

Το **(ε)**.

## Θέμα 1[[2]](#footnote-3)

Θεωρούμε ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους n από μια κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.)

Όπου θ είναι μία άγνωστη θετική παράμετρος.

1. Να βρείτε την εκτιμήτρια μέγιστης πιθανότητας, , της παραμέτρου θ.
2. Αν η τυχαία μεταβλητή Χ έχει σ.π.π. την g, να βρείτε την κατανομή που ακολουθεί η τ.μ. .
3. Να αποδείξετε ότι με πιθανότητα 1 ισχύει ότι .

### Ερώτημα (α)

Η πιθανοφάνεια μεγιστοποιείται όταν:

### Ερώτημα (β)

Για κάποιο

### Ερώτημα (γ)

Από τον ισχυρό ΝΜΑ έχουμε ότι με πιθανότητα 1 ισχύει:

Και λόγω της (1), έχουμε ότι

## Θέμα 2

Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) του ζεύγους είναι η:

1. Να δείξετε ότι η περιθώρια σ.π.π. της τ.μ. X είναι η .
2. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διασπορά της τ.μ. X.
3. Να υπολογίσετε τη συνδιακύμανση .
4. Να βρείτε τη δεσμευμένη κατανομή της τ.μ. Y δεδομένου ότι .
5. Να υπολογίσετε την πιθανότητα.
6. Να αποδείξετε ότι η τ.μ. είναι ανεξάρτητη από την Y και να βρείτε την κατανομή της.
7. Τα τυχαία διανύσματα , είναι ανεξάρτητα και έχουν για κάθε την ίδια κατανομή όπως το . Να προσδιορίσετε ακολουθίες και ώστε η ακολουθία τ.μ. με:

να συγκλίνει κατά κατανομή σε μια μη τετριμμένη τ.μ. Z (δηλ. η Z να μην παίρνει καμία τιμή με πιθανότητα 1), της οποίας την κατανομή να προσδιορίσετε.

Υπενθύμιση: Αν , ισχύει ότι

### Ερώτημα (α)

### Ερώτημα (β)

### Ερώτημα (γ)

### Ερώτημα (δ)

### Ερώτημα (ε)

Για , άρα:

### Ερώτημα (στ)

### Ερώτημα (ζ)

Επιλέγουμε:

Άρα:

Όμως, από Κ.Ο.Θ. και από ΙΝΜΑ . Άρα από Λήμμα Slutsky, . Τελικά έχουμε:

# Επαναληπτική 24

## Θέμα 1

Θεωρούμε ανεξάρτητες, ισόνομες, πραγματικές τυχαίες μεταβλητές (τ.μ.) με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.):

όπου α είναι μια άγνωστη θετική παράμετρος.

1. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διασπορά της παραπάνω κατανομής.
2. Να υπολογίσετε την εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας της παραμέτρου α, από τις .
3. Να υπολογίσετε την κατανομή που ακολουθεί η τ.μ. .
4. Να εκτιμήσετε τις παρακάτω πιθανότητες:

Να εκφράσετε τις απαντήσεις σας με τη βοήθεια της παραμέτρου α και της συνάρτησης κατανομής πιθανότητας της τυποποιημένης κανονικής κατανομής

### Ερώτημα (α)

Παρατηρούμε πως η συνάρτηση f είναι άρτια, αφού f(x)=f(-x). Άρα:

Η 2η ροπή είναι:

Και εφόσον η είναι περιττή:

### Ερώτημα (β)

### Ερώτημα (γ)

Και επειδή η είναι άρτια:

Θέτουμε

### Ερώτημα (δ)

Για μεγάλα n, από Κ.Ο.Θ., το άθροισμα προσεγγίζει την κανονική κατανομή:

Επομένως:

Θέτουμε , επομένως

Θέτουμε:

Το άθροισμα των τετραγώνων ακολουθεί την κατανομή , δηλαδή την με βαθμούς ελευθερίας:

Ο λόγος μίας τ.μ. που ακολουθεί κανονική κατανομή () και μίας τ.μ. που ακολουθεί την κατανομή () με το ίδιο πλήθος βαθμών ελευθερίας, προσεγγίζει την t κατανομή. Η t κατανομή για μεγάλα n προσεγγίζει την κανονική κατανομή. Άρα:

## Θέμα 2

Οι τυχαίες μεταβλητές (τ.μ.) U, V είναι ανεξάρτητες, ισόνομες, με ομοιόμορφη κατανομή στο (0,1).

α) Να υπολογίσετε τις συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) των τ.μ. και .

β) Να αποδείξετε ότι η κατανομή του ζεύγους \((L, R)\) είναι η ομοιόμορφη στο τρίγωνο που περιέχεται από τις ευθείες \( y = 1 \), \( x = 0 \) και \( y = x \).

γ) Να υπολογίσετε τη δεσμευμένη κατανομή της \( L \), δεδομένου ότι \( R = 1/2 \).

δ) Να υπολογίσετε τη συνδιακύμανση \( \text{Cov}(L, R) \).

ε) Αν θεωρήσουμε τώρα τις ανεξάρτητες τ.μ. \( U', V' \) οι οποίες είναι επιπλέον ανεξάρτητες από τις \( U, V \) παραπάνω και ορίσουμε κατ' αναλογία τις \( L' \) και \( R' \), ποια είναι η πιθανότητα η μικρότερη από τις μεγαλύτερες, δηλ. η \( R \land R' \), να είναι μικρότερη από τη μεγαλύτερη από τις μικρότερες, δηλ. την \( L \lor L' \);

στ) Αν αφήσουμε δύο σημεία ανεξάρτητα και ομοιόμορφα στο \( (0, 1) \) και στη συνέχεια επιλέξουμε ομοιόμορφα ένα σημείο \( P \) ανάμεσά τους, να υπολογίσετε τη σ.π.π. της θέσης \( X \) του σημείου \( P \).

# Κανονική 23

Θέμα 1

Μια ασφαλιστική εταιρεία πιστεύει ότι οι άνθρωποι μπορούν να χωριστούν σε δύο κατηγορίες: εκείνους που είναι επιρρεπείς σε ατυχήματα και εκείνους που δεν είναι. Κατά τη διάρκεια μιας χρονιάς, ένας επιρρεπής σε ατυχήματα άνθρωπος έχει ατύχημα με πιθανότητα 0,4, ανεξάρτητα για διαφορετικές χρονιές. Η αντίστοιχη πιθανότητα για έναν άνθρωπο που δεν είναι επιρρεπής σε ατυχήματα είναι 0,2. Υποθέτουμε ότι το 30% των ασφαλισμένων είναι επιρρεπείς σε ατυχήματα.

1. Ποια είναι η πιθανότητα ένας πελάτης της εταιρείας να έχει ατύχημα κατά τον πρώτο χρόνο του συμβολαίου του;
2. Δεδομένου ότι ένας πελάτης της εταιρείας είχε ατύχημα κατά τον πρώτο χρόνο του συμβολαίου του, ποια είναι η πιθανότητα να είναι επιρρεπής σε ατυχήματα;
3. Ποια είναι η πιθανότητα ένας πελάτης της εταιρείας να έχει ατύχημα τον δεύτερο χρόνο του συμβολαίου του, δεδομένου ότι είχε ατύχημα τον πρώτο χρόνο;
4. Ανάμεσα σε 300 πελάτες της εταιρείας, ποια είναι προσεγγιστικά η πιθανότητα τουλάχιστον 88 από αυτούς να έχουν ατύχημα κατά τον πρώτο χρόνο του συμβολαίου τους;

Ερώτημα (α)

Έστω Α το ενδεχόμενο ένας πελάτης να είναι επιρρεπής σε ένα ατύχημα και Α’ να μην είναι. Έστω επίσης Β το ενδεχόμενο ένας πελάτης να έχει ατύχημα μέσα στη 1η χρονιά και Β΄ να μην έχει. Ισχύει:

Ψάχνουμε την πιθανότητα ένας πελάτης να πάθει ατύχημα τον 1ο χρόνο, δηλαδή το P(B).

Ερώτημα (β)

Ψάχνουμε την πιθανότητα ένας πελάτης να είναι επιρρεπής, δεδομένου ότι έπαθε ατύχημα το 1ο χρόνο, δηλαδή Ρ(Α|Β).

Ερώτημα (γ)

Έστω C το ενδεχόμενο να έχει ατύχημα μέσα στη 2η χρονιά. Ψάχνουμε την πιθανότητα ένας πελάτης να πάθει ατύχημα τον 2ο χρόνο, δεδομένου ότι έπαθε ατύχημα τον 1ο χρόνο, δηλαδή το Ρ(C|Β). Ωστόσο, αφού οι χρονιές είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες, θα ισούται απλά με 0,26.

Ερώτημα (δ)

Έστω ο i-οστός πελάτης της εταιρείας, με εάν δεν πάθει ατύχημα καιεάν πάθει ατύχημα, την 1η χρονιά. Το συνολικό πλήθος των πελατών που έπαθαν ατύχημα δίνεται από τον τύπο:

Η Χi ακολουθεί κατανομή Bernoulli, με πιθανότητα . Άρα έχουμε μέση τιμή και διασπορά . H S επίσης ακολουθεί κατανομή Bernoulli, ως γραμμικό άθροισμα των Χ. Ψάχνουμε την πιθανότητα , ενώ έχουμε μέγεθος δείγματος Ν=300.

Θέτω:

Η Υ ακολουθεί κανονική κατανομή Ν(0,1) και από τον πίνακα της κανονικής κατανομής έχουμε:

Θέμα 2

Ένας πάροχος φυσικού αερίου πιστεύει ότι σε μία μέρα με τις σημερινές καιρικές συνθήκες, η κατανάλωση φυσικού αερίου ενός νοικοκυριού (σε κατάλληλη μονάδα μέτρησης) είναι τυχαία μεταβλητή (τ.μ.), Χ, με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.):

Ενώ οι καταναλώσεις διαφορετικών νοικοκυριών είναι ανεξάρτητες, ισόνομες τ.μ..

1. Να υπολογίσετε:
   1. Την τιμή της σταθεράς c.
   2. Την συνάρτηση κατανομής πιθανότητας της τ.μ. Χ.
2. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διασπορά της τ.μ. Χ.
3. Σε μια πολυκατοικία, υπάρχουν 2 νοικοκυριά που χρησιμοποιούν φυσικό αέριο. Ποια είναι η πιθανότητα η σημερινή κατανάλωση της πολυκατοικίας να ξεπεράσει την τιμή 1 (στις μονάδες που μετράμε την κατανάλωση);

Ερώτημα (α)

Για να βρούμε την σταθερά, θα πρέπει να κανονικοποιήσουμε την σ.π.π. ως ακολούθως:

Για να βρούμε την σ.κ.π.:

Δηλαδή:

Ερώτημα (β)

Για να βρούμε την μέση τιμή της Χ:

Ενώ για την διασπορά:

Ερώτημα (γ)

Έστω πως η κατανάλωση των 2 νοικοκυριών είναι X1, X2 αντίστοιχα. Η συνολική κατανάλωση την πολυκατοικίας είναι ίση με . Ψάχνουμε την πιθανότητα η συνολική κατανάλωση τους να ξεπερνά το 1, δηλαδή . Η S ακολουθεί την ίδια κατανομή με την Χ, αφού είναι γραμμικός συνδυασμός των Χ. Επιπλέον, έχουμε μέγεθος δείγματος Ν=2.

Θέτω:

Η Υ ακολουθεί κανονική κατανομή Ν(0,1) και από τον πίνακα της κανονικής κατανομής έχουμε:

Θέμα 3

Θέλουμε να εκτιμήσουμε την παράμετρο λ0 μιας εκθετικής κατανομής από ένα τυχαίο δείγμα της, . Υιοθετούμε την bayesian προσέγγιση και υποθέτουμε ότι η παράμετρος της κατανομής είναι μια τ.μ. Λ, της οποίας η εκ των προτέρων κατανομή είναι Εκθ(α) και δεδομένου ότι , οι τ.μ. είναι ανεξάρτητες, ισόνομες με κατανομή Εκθ(λ).

1. Ποια είναι η από κοινού σ.π.π. των και Λ, με βάση την προσέγγισή μας;
2. Ποια είναι η δεσμευμένη κατανομή της Λ δεδομένου ότι ;
3. Πώς περιμένετε να μοιάζει τυπικά η δεσμευμένη κατανομή του ερωτήματος (β), καθώς , και γιατί;

Ερώτημα (α)

Η εκ των προτέρων κατανομή της Λ είναι Εκθ(α), δηλαδή:

Η υπό συνθήκη κατανομή της δεδομένης της Λ=λ είναι:

Επειδή οι είναι ανεξάρτητες, η κοινή υπό συνθήκη σ.π.π. είναι:

Επομένως, η κοινή σ.π.π. των και Λ είναι:

Ερώτημα (β)

Η εκ των υστέρων κατανομή είναι ανάλογη της κοινής κατανομής της Λ και των . Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Bayes:

Από το Ερώτημα (γ):

Πρόκειται για τον πυρήνα μιας κατανομής Γάμμα, με παραμέτρους n+1 και :

Ερώτημα (γ)

Καθώς το μέγεθος του δείγματος n αυξάνεται, η εκ των υστέρων κατανομή της Λ συνήθως γίνεται πιο συγκεντρωμένη γύρω από την πραγματική τιμή της παραμέτρου. Αυτό συμβαίνει επειδή:

* Με περισσότερα δεδομένα, η επιρροή της εκ των προτέρων μειώνεται και η εκ των υστέρων μεταβλητή κυριαρχείται από την πιθανότητα.
* Ο μέσος όρος της εκ των υστέρων κατανομής θα προσεγγίσει τον πραγματικό μέσο όρο της εκθετικής κατανομής, λ0.

Συγκεκριμένα, για την εκ των υστέρων κατανομή:

Ο μέσος όρος της κατανομής Γάμμα είναι:

Καθώς το n τείνει στο άπειρο, το άθροισμα θα μεγαλώνει, ενώ το α θα γίνει αμελητέο. Έτσι, ο παραπάνω μέσος όρος θα συγκλίνει στο:

Θέμα 4

Αν είναι μια ακολουθία από ανεξάρτητες, ισόνομες τ.μ. με ομοιόμορφη κατανομή στο (0,1) και η τυχαία μεταβλητή , ακολουθεί κατανομή Γεω(ε) και είναι ανεξάρτητη από τις , να αποδείξετε ότι:

και να βρείτε τη σ.π.π. του ορίου X.

#### Λύση

Aν το είναι το ελάχιστο της ακολουθίας, τότε:

Άρα, η σ.κ.π. της δεδομένου ότι είναι:

Έστω . Η σ.κ.π. της προκύπτει από:

Δεδομένου ότι η είναι μια γεωμετρική τ.μ. ανεξάρτητη από τις ,, η σ.κ.π. της είναι:

Δεδομένου ότι :

και η σ.μ.π. της είναι:

Άρα:

Όταν έχουμε: . Άρα:

Αυτό το άθροισμα κυριαρχείται από τις μικρές τιμές n, και χρησιμοποιώντας την εκθετική προσέγγιση, μπορεί να αποδειχθεί ότι:

όπου η X έχει εκθετική κατανομή με ρυθμό 1. Η εκθετική κατανομή με ρυθμό 1 έχει σ.π.π.:

# Επαναληπτική 23

Θέμα 1

Η διάρκεια ζωής (σε έτη), T, ενός φωτοβολταϊκού στοιχείου (ΦΒΣ) είναι τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.):

1. Να αποδείξετε ότι και να βρείτε τη συνάρτηση κατανομής πιθανότητας (σ.κ.π.) της τ.μ. T.
2. Να υπολογίσετε τη μέση διάρκεια ζωής, μ, ενός ΦΒΣ αυτού του τύπου και την τυπική της απόκλιση, σ.
3. Αν ένα ΦΒΣ τοποθετήθηκε πριν 3 χρόνια και λειτουργεί ακόμα, να υπολογίσετε την πιθανότητα το ΦΒΣ να είναι λειτουργικό για τουλάχιστον 3 χρόνια ακόμα.
4. Σε ένα ηλιακό πάρκο τοποθετήθηκαν 728 τέτοια ΦΒΣ πριν από 3 χρόνια. Να υπολογίσετε προσεγγιστικά την πιθανότητα τουλάχιστον 360 από αυτά να είναι ακόμα λειτουργικά.

Ερώτημα (α)

Για να βρούμε την σταθερά, θα πρέπει να κανονικοποιήσουμε την σ.π.π. ως ακολούθως:

Για να βρούμε την σ.κ.π.:

Δηλαδή:

Ερώτημα (β)

Για να βρούμε την μέση τιμή της Χ:

Ενώ για την διασπορά:

Ερώτημα (γ)

Ψάχνουμε την πιθανότητα να είναι λειτουργικό μετά από 6 χρόνια, δεδομένου ότι είναι λειτουργικό μετά από 3 χρόνια, δηλαδή .

Η πιθανότητα ισούται με 1, αφού εάν είναι λειτουργικό μετά από 6 χρόνια, τότε προφανώς θα ήταν και μετά από 3 χρόνια. Άρα:

Ερώτημα (δ)

Έστω το i-οστό ΦΒΣ, με εάν δεν λειτουργεί μετά από 3 χρόνια καιεάν λειτουργεί. Το συνολικό πλήθος των ΦΒΣ που λειτουργούν μετά από 3 χρόνια δίνεται από τον τύπο:

Η Χi ακολουθεί κατανομή Bernoulli, με πιθανότητα . Άρα έχουμε μέση τιμή και διασπορά . H S επίσης ακολουθεί κατανομή Bernoulli, ως γραμμικός συνδυασμός των Χ. Ψάχνουμε την πιθανότητα , ενώ έχουμε μέγεθος δείγματος .

Θέτω:

Η Υ ακολουθεί κανονική κατανομή Ν(0,1) και από τον πίνακα της κανονικής κατανομής έχουμε:

Θέμα 2

Σε ένα δάσος, ζουν άτομα από ένα απειλούμενο με εξαφάνιση είδος. Κάθε άτομο του είδους επιλέγει κάθε μέρα, ανεξάρτητα από τα άλλα άτομα και από προηγούμενες επιλογές που έχει κάνει, μία από τις 5 πηγές του δάσους και την επισκέπτεται για νερό. Έχετε τοποθετήσει κάμερες σε μία πηγή Π, και θα την παρακολουθείτε επί μία εβδομάδα.

1. Αν το πλήθος των ατόμων που ζουν στο δάσος είναι Ν, να αποδείξετε ότι το πλήθος των ατόμων που επισκέπτονται την πηγή Π κάθε μέρα είναι τ.μ. με κατανομή Διων(Ν,1/5).
2. Να υπολογίσετε τη συνάρτηση μάζας πιθανότητας (σ.μ.π.) του πλήθους, Ι, των διαφορετικών ατόμων που θα επισκεφτούν την πηγή Π κατά τη διάρκεια της εβδομάδας που ακολουθεί.

Θέλουμε να εκτιμήσουμε το άγνωστο πλήθος, Ν, με τη βοήθεια της τ.μ. Ι που μπορούμε να παρατηρήσουμε. Υιοθετούμε την Bayesian προσέγγιση και υποθέτουμε για τη Ν την εκ των προτέρων κατανομή .

1. Να υπολογίσετε τη σ.μ.π. της τ.μ. Ι με αυτή την προσέγγιση.
2. Να υπολογίσετε την εκ των υστέρων κατανομή της Ν, δεδομένου ότι .

Ερώτημα (α)

Έχουμε Ν άτομα, 5 πηγές και πιθανότητα επιλογής οποιασδήποτε πηγής 0,2 (συμπεριλαμβανομένου και της Π). Έχουμε δηλαδή Ν δοκιμές Bernoulli για την πηγή Π, με πιθανότητα 0.2 (δηλαδή ένα άτομο είτε να επιλέξει την Π είτε όχι). Έστω Χ το πλήθος των ατόμων που επέλεξαν την Π. Η Χ θα ακολουθεί διωνυμική κατανομή με παραμέτρους Ν και 0,2.

Ερώτημα (β)

Η πιθανότητα ένα άτομο να **μην** επιλέξει την Π μία οποιαδήποτε ημέρα είναι 0,8. Γνωρίζουμε πως η επιλογή σε σχέση με τα άλλα άτομα είναι ανεξάρτητη, όπως επίσης είναι ανεξάρτητη από τις προηγούμενες επιλογές του ατόμου. Επομένως, η πιθανότητα ένα άτομο να **μην** επιλέξει την Π για 7 ημέρες θα είναι απλά .

Συμπληρωματικά, η πιθανότητα ένα άτομο να επιλέξει την Π **τουλάχιστον** μία μέρα μέσα στην εβδομάδα είναι .

Η Ι ακολουθεί διωνυμική κατανομή με παραμέτρους Ν και . Η συνάρτηση μάζας πιθανότητας είναι:

Ερώτημα (γ)

Γνωρίζουμε από το Ερώτημα (β) την κατανομή της Ι. Επομένως, δεδομένου ότι το πλήθος Ν είναι n, η νέα συνάρτηση μάζας πιθανότητας της Ι είναι:

Ερώτημα (δ)

Ψάχνουμε την πιθανότητα . Από τον κανόνα του Bayes:

Γνωρίζουμε πως η Ν ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο 50, άρα:

Επιπλέον, από το Ερώτημα (γ) προκύπτει:

Από LTP (Law of Total Probability) έχουμε:

Συνδυάζοντας όλους τους τύπους:

**Σημείωση (όχι απαραίτητα σωστή)**

Στην πράξη, μπορούμε να το προσεγγίσουμε. Για μικρές τιμές του p, εδώ βέβαια είναι 0,79, έχουμε:

Δηλαδή:

Θέμα 3

Οι τ.μ. Χ και Y είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν την τυπική κανονική κατανομή N(0,1).

1. Να υπολογίσετε την από κοινού σ.π.π. των τ.μ. και .
2. Να βρείτε τη σ.κ.π. της τ.μ. .

Δύο πανομοιότυπα σώματα, Α και Β, κινούνται με σταθερή ταχύτητα κατά μήκος του άξονα x'x. Αρχικά βρίσκονται στις θέσεις και (σε m) και έχουν ταχύτητες και (σε m/sec) οι οποίες είναι ανεξάρτητες τυπικές κανονικές τ.μ.. Αν τα σώματα συγκρουστούν, η σύγκρουσή τους θα είναι ελαστική και, όπως γνωρίζουμε από τη Φυσική, θα ανταλλάξουν ταχύτητες.

1. Ποια πιστεύετε ότι θα είναι η σ.π.π. της τελικής ταχύτητας του σώματος Α και γιατί;
2. Να βρείτε τη σ.κ.π. της θέσης του σώματος Α μετά από 1 sec.

Ερώτημα (α)

Έχουμε πως:

Αφού οι Χ, Υ είναι ανεξάρτητες, η από κοινού σ.π.π. τους θα είναι το γινόμενο των σ.π.π. τους:

Άρα η από κοινού σ.π.π. των U, V:

Ερώτημα (β)

Έχουμε πως:

Το τελευταίο ισοδυναμεί με και αφού οι Χ, Υ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, η πιθανότητα ισούται με το γινόμενο των επιμέρους πιθανοτήτων:

Ερώτημα (γ)

Η θέση των δύο σωμάτων την στιγμή t (πριν την ενδεχόμενη κρούση) δίνεται από τις εξισώσεις:

Για να συγκρουστούν θα πρέπει κάποια στιγμή να έχουν την ίδια θέση, την ίδια χρονική στιγμή, δηλαδή:

Προφανώς, η χρονική στιγμή θα πρέπει να είναι θετική, δηλαδή:

Άρα, η πιθανότητα να συγκρουστούν θα είναι . Θέτω , η οποία ακολουθεί την ίδια κατανομή, ως γραμμικός συνδυασμός τ.μ. Άρα:

Δηλαδή έχουμε 50% πιθανότητα να συγκρουστούν, με τα εξής αποτελέσματα:

Σε κάθε περίπτωση, η τελική ταχύτητα θα είναι ίση με μία από τις αρχικές, οι οποίες ακολουθούν κανονική κατανομή. Άρα και η .

Ερώτημα (δ)

Παρατηρούμε πως έχουμε 2 περιπτώσεις:

*Περίπτωση 1: Δεν γίνεται κρούση ή γίνεται, αλλά μετά το 1 δευτερόλεπτο*

Η θέση του Α μετά από 1 δευτερόλεπτο είναι:

Επομένως, η σ.κ.π. θα είναι:

Αυτή η περίπτωση μπορεί να ισχύει αν η κρούση γίνει ακριβώς στο 1 δευτερόλεπτο, αφού τη θεωρούμε στιγμιαία.

*Περίπτωση 2: Γίνεται κρούση πριν το 1 δευτερόλεπτο*

Εάν έχουμε κρούση, έστω την χρονική στιγμή tκρ, τότε η θέση του Α μετά την κρούση θα δίνεται από την εξίσωση:

Άρα, η ακολουθεί επίσης κανονική κατανομή, απλά μετατοπισμένη, δηλαδή . Επομένως:

# Επί Πτυχίω 23

Θέμα 1

Ένας φορητός υπολογιστής λειτουργεί ασταμάτητα. Η φόρτιση της μπαταρίας του (από πλήρως άδεια σε πλήρως φορτισμένη) διαρκεί 1 ώρα. Κάθε φορά που ο υπολογιστής φορτίζεται πλήρως σταματάμε την παροχή ρεύματος μέχρι η μπαταρία του να εξαντληθεί ξανά. Υποθέτουμε ότι ο χρόνος λειτουργίας (σε ώρες) ανάμεσα σε διαδοχικές πλήρεις φορτίσεις της μπαταρίας περιγράφεται από την τυχαία μεταβλητή (τ.μ.)

όπου η τ.μ. X ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα [-3,1].

1. Ποια είναι η μέση τιμή και ποια είναι η διασπορά του χρόνου Τ;
2. Ποια είναι η πιθανότητα ο εν λόγω υπολογιστής να λειτουργήσει πάνω από 12 ώρες ανάμεσα σε διαδοχικές φορτίσεις;
3. Ξεκινάτε να χρησιμοποιείτε τον υπολογιστή μετά από μία πλήρη φόρτιση και τον λειτουργείτε για 4 ώρες χωρίς να χρειαστεί φόρτιση. Ποια είναι η πιθανότητα ο υπολογιστής να λειτουργήσει για ακόμα 4 ώρες χωρίς να χρειαστεί φόρτιση;
4. Αν αρχικά ο υπολογιστής ξεκινά με άδεια μπαταρία, να υπολογίσετε προσεγγιστικά την πιθανότητα να αποφορτιστεί τουλάχιστον 240 φορές τις πρώτες 100 ημέρες λειτουργίας του.
5. Ποια είναι η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας (σ.κ.π.) του χρόνου Τ;

Ερώτημα (α)

Για μια ομοιόμορφη τυχαία μεταβλητή , ο μέσος όρος της είναι:

Στην περίπτωσή μας, , , και :

Έτσι, η μέση τιμή του Τ είναι:

Η διασπορά της :

Χρησιμοποιώντας τον ίδιο τύπο όπως και προηγουμένως:

Άρα .

Ερώτημα (β)

Ψάχνουμε την πιθανότητα . Δεδομένου ότι :

Ερώτημα (γ)

Δεδομένου ότι ο υπολογιστής έτρεξε για 4 ώρες, θέλουμε την πιθανότητα να τρέξει άλλες 4 ώρες:

Οι επιμέρους πιθανότητες:

Συνολικά, .

Ερώτημα (δ)

Έστω πως συμβολίσουμε με Α το πλήθος των αποφορτίσεων του υπολογιστή. Δεδομένου ότι ο υπολογιστής λειτουργεί ασταμάτητα και ο μέσος χρόνος μεταξύ των φορτίσεων είναι 9 ώρες, ο αριθμός των αποφορτίσεων σε 100 ημέρες (2400 ώρες) ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο . Πρόχειρα, εάν το λ είναι πολύ μεγάλο, η κατανομή αυτή *προσεγγίζει* την κανονική, με μέση τιμή και διασπορά ίση με λ. Άρα, προκύπτει:

Θέτοντας , έχουμε:

Ερώτημα (ε)

Η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας της Χ:

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Χ:

Η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας της T:

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της T:

Θέμα 2

Οι τ.μ. Χ και Υ είναι ανεξάρτητες, ισόνομες με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

για κάποιο λ>0.

1. Να βρείτε την από κοινού σ.π.π. των (Χ,Υ).
2. Να αποδείξετε ότι .
3. Να υπολογίσετε τη σ.π.π. της τ.μ. .
4. Κάνουμε ανεξάρτητες παρατηρήσεις της μεταβλητής Χ. Αν για 400 ακριβώς έχουμε , να βρείτε την εκτίμηση της παραμέτρου λ με τη μέθοδο της μέγιστης πιθανότητας.

Ερώτημα (α)

Δεδομένου ότι οι Χ, Υ είναι ανεξάρτητες, η από κοινού σ.π.π. είναι το γινόμενο των επιμέρους σ.π.π. τους:

Ερώτημα (β)

Άρα:

Ερώτημα (γ)

Έστω . Για να βρούμε τη σ.π.π. της Ζ, χρησιμοποιούμε τη συνέλιξη των σ.π.π. των Χ, 2Y:

Άρα:

Ερώτημα (δ)

Από το Ερώτημα (β):

Δεδομένου ότι αυτό συνέβη 400 φορές σε 1000 δοκιμές:

Το θέτουμε ίσο με τη θεωρητική πιθανότητα:

# Κανονική 22

***Λύσεις διδάσκοντα (Crd: Nacho Scocco)***

## Θέμα 1

Δύο εξυπηρετητές Α και Β διαχειρίζονται τα αιτήματα που φτάνουν σε έναν κέντρο εξυπηρέτησης. Κάθε εισερχόμενο αίτημα, ανεξάρτητα από τα άλλα αιτήματα, διοχετεύεται για διεκπεραίωση είτε στον εξυπηρετητή Α με πιθανότητα , ή στον Β με πιθανότητα . Ο χρόνος (σε msec) διεκπεραίωσης αιτημάτων από τον Α είναι μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί εκθετική κατανομή με ρυθμό . Ο αντίστοιχος χρόνος (σε msec) διεκπεραίωσης από τον Β είναι μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί επίσης εκθετική κατανομή με ρυθμό .

1. Να υπολογίσετε την πιθανότητα ένα εισερχόμενο αίτημα να διεκπεραιωθεί σε περισσότερα από 0.4 msec.
2. Αν δεδομένου ότι ένα αίτημα διεκπεραιώνεται σε περισσότερα από 0.4 msec, να υπολογίσετε την πιθανότητα να διεκπεραιωθεί από τον Α.
3. Να υπολογίσετε τον μέσο χρόνο διεκπεραίωσης ενός αιτήματος που φτάνει στο κέντρο εξυπηρέτησης.

**Υπόδειξη**: Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της εκθετικής κατανομής με ρυθμό λ είναι για .

### Ερώτημα (α)

Αν Τ είναι ο χρόνος εξυπηρέτησης του αιτήματος και Α (αντίστοιχα Β) είναι το ενδεχόμενο δρομολόγησης του αιτήματος προς διεκπεραίωση στον εξυπηρετητή Α (αντίστοιχα Β), από τον τύπο ολικής πιθανότητας έχουμε:

Για μια εκθετική τ.μ. Χ με ρυθμό λ έχουμε

Άρα:

### Ερώτημα (β)

Από τον τύπο του Bayes:

### Ερώτημα (γ)

Ορίζουμε την συνάρτηση δείκτη (indicator function) ως:

Μπορούμε να γράψουμε . Από τη γραμμικότητα της μέσης τιμής έχουμε:

Για μια εκθετική τ.μ. Χ με ρυθμό λ έχουμε:

Άρα, ο αναμενόμενος χρόνος σε msec είναι:

## Θέμα 2

Ένα μηχάνημα στο καζίνο (slot machine) έχει προγραμματιστεί να προσφέρει στους παίκτες κάθε έτος ένα τυχαίο έπαθλο X (σε ευρώ), ανεξάρτητα από όλες τις άλλες ώρες, με και (). Από μακροχρόνια δεδομένα γνωρίζουμε ότι το συνολικό ποσό Υ (σε ευρώ) που παίζεται από τους παίκτες στο μηχάνημα κάθε ώρα ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα και είναι ανεξάρτητο από τα ποσά που παίζονται τις άλλες ώρες, καθώς και από τα έπαθλα που προσφέρει το μηχάνημα.

1. Να υπολογιστεί προσεγγιστικά η πιθανότητα μέσα σε ένα μήνα το μηχάνημα να προσφέρει συνολικό έπαθλο στους παίκτες πάνω από 135.000 ευρώ.
2. Να υπολογιστεί προσεγγιστικά η πιθανότητα μέσα σε ένα μήνα το καθαρό κέρδος που απέφερε το μηχάνημα στο καζίνο (δηλ. το συνολικό ποσό που παίχτηκε μείον το συνολικό ποσό που πρόσφερε το μηχάνημα ως έπαθλο) να είναι πάνω από 10.000 ευρώ.
3. Έστω ότι θέλουμε να αλλάξουμε την παράμετρο στο πρόγραμμα του μηχανήματος. Ποια είναι η μεγαλύτερη τιμή για για την οποία το καθαρό κέρδος που θα αποφέρει κάθε μήνα το μηχάνημα στο καζίνο να είναι πάνω από 10.000 ευρώ με πιθανότητα τουλάχιστον 95%;

Υποθέστε ότι το καζίνο λειτουργεί όλο το 24ωρο και ότι ο μήνας έχει 30 μέρες. Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι τιμές Φ(x) της συνάρτησης κατανομής πιθανότητας της τυπικής κανονικής για διάφορες τιμές του x.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 0 | 0,95 | 1 | 1,41 | 1,6449 | 1,96 | 2 | 3 | 3,3 | 6 |
| Φ(x) | 0,5 | 0,82894 | 0,84134 | 0,92073 | 0,95 | 0,975 | 0,97725 | 0,98865 | 0,99952 | 1 |

### Ερώτημα (α)

Ένας μήνας έχει ώρες. Έστω S τα συνολικά κέρδη που προσέφερε το μηχάνημα στους παίκτης σε ένα μήνα, δηλαδή ώρες. Τότε:

Όπου τα κέρδη που προσέφερε το μηχάνημα την ώρα j. Από την εκφώνηση γνωρίζουμε ότι οι τ.μ. είναι ανεξάρτητες και ισόνομες. Ζητείται η πιθανότητα . Από Κ.Ο.Θ. έχουμε:

Θέτοντας , έχουμε:

### Ερώτημα (β)

Έστω Τ το συνολικό ποσό που παίχτηκε στο μηχάνημα σε ένα μήνα. Τότε:

Όπου τα κέρδη που προσέφερε το μηχάνημα την ώρα j. Από την εκφώνηση γνωρίζουμε ότι οι τ.μ. είναι ανεξάρτητες και έχουν ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα . Άρα:

Αν Κ είναι το καθαρό κέρδος που απέφερε το μηχάνημα στο καζίνο σε ένα μήνα, τότε:

Από την εκφώνηση συμπεραίνουμε ότι οι τ.μ. είναι ανεξάρτητες και ισόνομες. Επίσης, αφού δίνεται ότι οι τ.μ. είναι ανεξάρτητες:

Ζητείται η πιθανότητα . Από το Κ.Ο.Θ. έχουμε:

Θέτοντας , έχουμε:

### Ερώτημα (γ)

Θέλουμε . Από το Ερώτημα (β) θα έχουμε:

Θέτοντας , από το Κ.Ο.Θ. προκύπτει ότι η παραπάνω ανίσωση είναι περίπου ισοδύναμη με:

Και επειδή:

Θα πρέπει να έχουμε:

(ενδιαφέρον αριθμός![[3]](#footnote-4)). Άρα:

## Θέμα 3

Θεωρήστε τις ανεξάρτητες, ισόνομες, τ.μ. που ακολουθούν ομοιόμορφη κατανομή στο [0,θ], δηλαδή έχουν συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας την:

όπου θ είναι μια άγνωστη θετική παράμετρος. Θέλουμε να εκτιμήσουμε τη θ από τις .

1. Να δείξετε ότι η εκτιμήτρια της θ με τη μέθοδο των ροπών είναι .
2. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διασπορά της εκτιμήτριας .
3. Να δείξετε ότι , σχεδόν βεβαίως (με πιθανότητα 1), καθώς .
4. Να δείξετε ότι η εκτιμήτρια της θ με τη μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας είναι
5. Να υπολογίσετε τη συνάρτηση κατανομής πιθανότητας της .
6. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διασπορά της εκτιμήτριας .
7. Να δείξετε ότι , σχεδόν βεβαίως, καθώς .
8. Ποια από τις θεωρείτε καλύτερη εκτιμήτρια της παραμέτρου θ και γιατί;

### Ερώτημα (α)

Η μέση τιμή της κατανομής είναι:

Θα βρούμε την εκτιμήτρια εξισώνοντας την με την εμπειρική μέση τιμή:

### Ερώτημα (β)

Από τη γραμμικότητα της μέσης τιμής . Επειδή οι προσθετέοι στον τύπο της είναι ανεξάρτητες τ.μ. έχουμε:

### Ερώτημα (γ)

Εφόσον οι είναι ανεξάρτητες, ισόνομες και έχουν πεπερασμένη μέση τιμή, από τον ισχυρό ΝΜΑ, έχουμε ότι με πιθανότητα 1:

Άρα:

### Ερώτημα (δ)

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι:

Επειδή η φθίνει και για , η πιθανοφάνεια μεγιστοποιείται για , δηλαδή

### Ερώτημα (ε)

Έχουμε ότι η σ.κ.π. της ΕΜΠ είναι για :

Η προτελευταία ισότητα προκύπτει από την ανεξαρτησία των και η τελευταία επειδή είναι ισόνομες και ομοιόμορφες στο . φυσικά, αν έχουμε , ενώ αν , έχουμε , άρα:

### Ερώτημα (στ)

Έχουμε ότι:

Όπου:

Επομένως η έχει σ.π.π. την f.

Επιπλέον:

Επομένως:

### Ερώτημα (ζ)

Παρατηρούμε ότι με πιθανότητα 1 η είναι αύξουσα και φραγμένη πάνω (από το θ). επομένως, η συγκλίνει με πιθανότητα 1 σε κάποιο όριο, έστω . Έχουμε ακόμα ότι για κάθε :

Για , έχουμε ότι , άρα:

Επομένως:

### Ερώτημα (η)

Και οι δύο συναρτήσεις είναι συνεπείς, όμως η ΕΜΠ είναι προτιμότερη γιατί η διασπορά της φθίνει ως (Ερώτημα (στ)), ενώ η διασπορά της φθίνει ως (Ερώτημα (γ)).

# Επαναληπτική 22

## Θέμα 1

Έχουμε μία καλά ανακατεμένη συνήθη τράπουλα 52 φύλλων (στην οποία υπάρχουν οι 4 άσοι: Α♠ Α♣, Α♥ και Α♦). Θα ανοίξουμε τα φύλλα της ένα-ένα και συμβολίζουμε με Ν το ενδεχόμενο να μην συναντήσουμε κανέναν άσο στα πρώτα 26 φύλλα που θα ανοίξουμε.

1. Να εξηγήσετε χωρίς πράξεις γιατί ισχύει .
2. Να αποδείξετε ότι .
3. Αν στα πρώτα 26 φύλλα δεν συναντήσουμε κανέναν άσο, ποια είναι η πιθανότητα το 27ο φύλλο να είναι ο Α♥;
4. Με δεδομένο ότι το 27ο φύλλο είναι Α♥, ποια η πιθανότητα αυτός να είναι ο 1ος άσος που εμφανίζεται;
5. 883 άτομα εκτελούν ανεξάρτητα το παραπάνω πείραμα. Ποια είναι προσεγγιστικά η πιθανότητα ώστε 2 ακριβώς από αυτά να μην συναντήσουν άσο στα πρώτα 26 φύλλα και το 27ο φύλλο που θα τραβήξουν να είναι ο Α♥;

### Ερώτημα (α)[[4]](#footnote-5)

Δεδομένου ότι υπάρχουν 4 άσσοι στην τράπουλα και 26 είναι τα μισά από τα 52 φύλλα, είναι πιο πιθανό να συναντήσουμε τουλάχιστον έναν άσο. Η έκφραση αντιπροσωπεύει την πιθανότητα τεσσάρων ανεξάρτητων δυαδικών γεγονότων, το καθένα με πιθανότητα . Ωστόσο, η αποφυγή οποιουδήποτε άσου περιλαμβάνει μια πιο σύνθετη δομή. Καθώς τραβάμε περισσότερα φύλλα, οι πιθανότητες να αποφύγουμε έναν άσσο μειώνονται ραγδαία.

### Ερώτημα (β)

Η συνηθισμένη τράπουλα έχει 52 κάρτες. Το συνολικό πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε 26 από τις 52 είναι (combinations):

Στην συνηθισμένη τράπουλα υπάρχουν 4 άσσοι και 48 «μη-άσσοι» κάρτες. Το συνολικό πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε 26 από τις 48 είναι:

Επομένως:

### Ερώτημα (γ)

Έστω Ζ το ενδεχόμενο να τραβήξουμε τον Α♥ στην 27η κάρτα. Έχοντας τραβήξει 26 «μη-άσσοι» κάρτες, μένουν άλλες 26, μία εκ των οποίων είναι ο Α♥. Επομένως:

### Ερώτημα (δ)

Αναζητούμε την πιθανότητα , και από Κ.Ο.Θ.:

Για να υπολογίσουμε την πιθανότητα ακολουθούμε το εξής σκεπτικό: έχουμε 52 κάρτες και θέλουμε να βρούμε το συνολικό πλήθος των τρόπων να τις βάλουμε στη σειρά, «φιξάροντας» μία από αυτές (την Α♥). Θέλουμε δηλαδή να βρούμε το συνολικό πλήθος των τρόπων να βάλουμε στη σειρά 51 κάρτες, το οποίο είναι (permutations):

Επομένως:

### Ερώτημα (ε)

Έστω το i-οστό άτομο που τραβάει 27 κάρτες. Η πιθανότητα να πετύχει το πείραμα (δηλαδή οι πρώτες 26 κάρτες να είναι «μη-άσσοι» και η 27η είναι ο Α♥ είναι:

Η μπορεί είτε να πετύχει το πείραμα ή να μην το πετύχει. Επομένως, η ακολουθεί διωνυμική κατανομή με πιθανότητα p. Έστω επίσης το συνολικό πλήθος των ατόμων στα οποία πετυχαίνει αυτό το πείραμα, δηλαδή:

Ψάχνουμε δηλαδή:

## Θέμα 2

Μία τυχαία μεταβλητή έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

Όπου , μία άγνωστη παράμετρος.

1. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή της Χ, για κάθε θ>0.
2. Να αποδείξετε ότι .[[5]](#footnote-6)
3. Να αποδείξετε ότι η εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας της θ από τις ανεξάρτητες τ.μ. οι οποίες ακολουθούν την κατανομή της Χ είναι η:
4. Να εξηγήσετε γιατί η τείνει με πιθανότητα 1 στο θ, καθώς το .

### Ερώτημα (α)

### Ερώτημα (β)

Θέτουμε και άρα:

### Ερώτημα (γ)

Η συνάρτηση πιθανότητας δίνεται από την κοινή πυκνότητα πιθανότητας αυτών των n τ.μ.:

Η συνάρτηση λογαριθμικής πιθανοφάνειας είναι:

Για να βρούμε την εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας της θ, διαφοροποιούμε την ως προς θ και το θέτουμε ίσο με μηδέν:

### Ερώτημα (δ)

Η εκτιμήτρια βασίζεται στον δειγματικό μέσο όρο του . Από Ερώτημα (β), γνωρίζουμε ότι . Σύμφωνα με τον ΝΜΑ, ο δειγματικός μέσος συγκλίνει σχεδόν σίγουρα στο καθώς .

Έτσι, καθώς , η εκτιμήτρια συγκλίνει στην πραγματική τιμή του θ με πιθανότητα 1. Αυτή η σύγκλιση ονομάζεται συνέπεια της εκτιμήτριας μέγιστης πιθανοφάνειας.

## Θέμα 3

Ένας λαγός κινείται με άλματα στο επίπεδο. Κάθε άλμα είναι μήκους 1μ και έχει κατεύθυνση μία από τις 4 βασικές κατευθύνσεις που είναι παράλληλες στους άξονες x και y (πάνω, κάτω, δεξιά και αριστερά) με πιθανότητα , ανεξάρτητα από τα άλλα άλματα. Ο λαγός ξεκινάει από τη φωλιά του στο (0,0). Έστω η θέση του μετά από n άλματα.

1. Να δώσετε ένα απλό επιχείρημα που να δείχνει ότι οι τυχαίες μεταβλητές και **δεν** είναι ανεξάρτητες. ***Υπόδειξη:*** δέσμευση με το ενδεχόμενο .
2. Να αποδείξετε ότι μπορούμε να γράψουμε:

όπου τα ζευγάρια , είναι ανεξάρτητα για διαφορετικά k, ενώ για κάθε k ισχύουν:

1. Να υπολογίσετε, δείχνοντας όλα τα βήματα, την συνδιασπορά .
2. Για δεδομένες σταθερές , να βρείτε την ασυμπτωτική κατανομή της ΤΜ:
3. Με έναν πρόχειρο (όχι απαραίτητα αυστηρό) ισχυρισμό επιχειρηματολογήστε ότι, όταν το n είναι αρκετά μεγάλο, οι τ.μ. και είναι προσεγγιστικά ανεξάρτητες.
4. Να υπολογίσετε προσεγγιστικά την πιθανότητα μετά από 200 άλματα ο λαγός να βρίσκεται σε απόσταση το πολύ 20μ από τη φωλιά του.

### Ερώτημα (α)

Ο λαγός μπορεί να κινηθεί είτε οριζόντια είτε κάθετα, αλλά όχι και τα δύο. Εξετάζουμε το ενδεχόμενο , δηλαδή ο λαγός κινείται εξ ολοκλήρου στην κατεύθυνση x. Αυτό θα σήμαινε ότι ο λαγός δεν έκανε ποτέ άλμα στην κατεύθυνση y, που σημαίνει άμεσα .

Έτσι, η γνώση ότι παρέχει πλήρη πληροφόρηση για την και συγκεκριμένα ότι . Αυτή η εξάρτηση συνεπάγεται ότι τα δεν είναι ανεξάρτητα.

### Ερώτημα (β)

Σε κάθε άλμα k, ο λαγός κινείται προς μία από τις τέσσερις κύριες κατευθύνσεις: δεξιά , αριστερά , πάνω , κάτω .

Έτσι, κάθε άλμα μπορεί να αναπαρασταθεί ως ένα ζεύγος , όπου ισχύουν τα ακόλουθα:

* , επειδή ο λαγός δεν μπορεί να κινηθεί ταυτόχρονα στις κατευθύνσεις x και y.
* , επειδή ο λαγός κινείται δεξιά ή αριστερά με ίση πιθανότητα.
* , επειδή ο λαγός κινείται προς τα πάνω ή προς τα κάτω με ίση πιθανότητα.

Επομένως:

όπου τα ζευγάρια , είναι ανεξάρτητα για διαφορετικά k, ενώ για κάθε k ισχύουν:

### Ερώτημα (γ)

Η συνδιακύμανση μεταξύ δίνεται από τον τύπο:

Ενώ ισχύουν τα εξής:

Άρα, λόγω της γραμμικότητας της μέσης τιμής:

Επίσης:

Εάν , τότε είτε ή , άρα .. Εάν , τότε  *,* , αφού είναι ανεξάρτητες. Έτσι, . Τελικά:

### Ερώτημα (δ)

Δεδομένου ότι οι είναι αθροίσματα ανεξάρτητων, ομοίως κατανεμημένων τυχαίων μεταβλητών με μέση τιμή 0 και πεπερασμένη διακύμανση, σύμφωνα με το Κ.Ο.Θ. είναι ασυμπτωτικά κανονικές καθώς . Δηλαδή:

Αντίστοιχα για το . Αφού οι είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους:

Αντίστοιχα για το . Έτσι, προκύπτει:

### Ερώτημα (ε)[[6]](#footnote-7)

Παρόλο που οι δεν είναι ανεξάρτητες, επειδή αποτελούν άθροισμα των ανεξάρτητων, ομοίως κατανεμημένων τυχαίων μεταβλητών , το Κ.Ο.Θ. υποδηλώνει ότι καθώς , θα προσεγγίσουν κανονικές κατανομές με μηδενική μέση τιμή και διακύμανση ανάλογη του n.

Αυτή η προσέγγιση ισχύει επειδή, στο όριο, η εξάρτηση μεταξύ των μεμονωμένων αλμάτων εξασθενεί και κυριαρχεί η συνολική επίδραση πολλών ανεξάρτητων αλμάτων.

### Ερώτημα (στ)

Η απόσταση του λαγού από την αρχή των αξόνων είναι:

Η ακολουθεί την κατανομή, δηλαδή την με [[7]](#footnote-8).

Συγκεκριμένα για όμως, η κατανομή είναι ισοδύναμη με την εκθετική κατανομή με , η οποία έχει συνάρτηση κατανομής πιθανότητας:

Επομένως:

1. Στα original θέματα, οι επιλογές είχαν τυπογραφικό και ήταν αντίστροφα, δηλαδή 1/3, 1/6, 1/7… [↑](#footnote-ref-2)
2. Επίσημη λύση διδάσκοντα για τα θέματα 1 και 2. [↑](#footnote-ref-3)
3. Disclaimer: το σχόλιο είναι του Λουλάκη και το άφησα χάριν μεταφοράς των επίσημων λύσεων. Δεν *φτιάχνομαι* με αριθμούς. [↑](#footnote-ref-4)
4. Απάντηση του ChatGPT-4o, v. 09/2024. Οι επίσημες λύσεις που μετέφερε η χρήστης KaterinaL δεν περιέχουν το Ερώτημα (α). Φαντάζομαι ούτε ο Λουλάκης ήξερε τι ήθελε. [↑](#footnote-ref-5)
5. Στα original θέματα, ο Λουλάκης είχε βάλει log, αλλά εννοούσε ln – εάν το έλυνες με log σου έκοβε 😊. [↑](#footnote-ref-6)
6. Οι επίσημες λύσεις του χρήστη KaterinaL γράφουν πως είναι εκτός ύλης το συγκεκριμένο. [↑](#footnote-ref-7)
7. Η κατανομή ([chi-squared distribution](https://en.wikipedia.org/wiki/Chi-squared_distribution)) είναι μία ειδική περίπτωση της κατανομής Γάμμα ([gamma distribution](https://en.wikipedia.org/wiki/Gamma_distribution)). [↑](#footnote-ref-8)